

Задачі найкращого відновлення на класах, що задаються обмеженнями на декілька старших похідних функцій

В. Ф. Бабенко, О. В. Коваленко

1 Постановка задачі і огляд відомих результатів

Нехай задано підмножину \mathfrak{M} множини C неперервних 2π – періодичних функцій $x(t)$ і числа $0 \leq u_1 < u_2 < \dots < u_{2n} < 2\pi$, $u := (u_1, \dots, u_{2n})$.

Довільну функцію $\Phi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ ми будемо називати методом відновлення значення функції $x \in \mathfrak{M}$ в точці $\tau \in [0, 2\pi)$, а величину

$$e(\mathfrak{M}, u, \Phi, \tau) := \sup_{x \in \mathfrak{M}} |x(\tau) - \Phi(x(u_1), \dots, x(u_{2n}))|$$

— похибкою відновлення методом Φ .

Задача найкращого відновлення значення функції $x \in \mathfrak{M}$ в точці τ за її значеннями в точках u формулюється наступним чином.

Задача 1 Знайти найкращу похибку відновлення

$$E(\mathfrak{M}, u, \tau) := \inf_{\Phi} e(\mathfrak{M}, u, \Phi, \tau)$$

а також найкращий метод відновлення $\tilde{\Phi}$, на якому досягається найкраща похибка відновлення.

Якщо нас цікавить вся функція $x(t)$, а не тільки її значення в фіксованій точці τ , то виникає задача найкращого відновлення функції $x \in \mathfrak{M}$ за її значеннями в точках u .

Довільну функцію $\Psi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow C$ ми будемо називати методом відновлення функції $x \in \mathfrak{M}$, а величину

$$e(\mathfrak{M}, u, \Psi, \|\cdot\|) := \sup_{x \in \mathfrak{M}} \|x - \Psi(x(u_1), \dots, x(u_{2n}))\|$$

— похибкою відновлення методом Ψ ($\|\cdot\|$ — деяка норма в просторі C).

Задача 2 Знайти найкращу похибку відновлення

$$E(\mathfrak{M}, u, \|\cdot\|) := \inf_{\Psi} e(\mathfrak{M}, u, \Psi, \|\cdot\|)$$

а також найкращий метод $\tilde{\Psi}$, на якому досягається найкраща похибка відновлення.

Крім того, цікавим є питання про найкраще розташування інформаційних вузлів.

Задача 3 Знайти вектор u^* , на якому досягається

$$E(\mathfrak{M}, \|\cdot\|) := \inf_u E(\mathfrak{M}, u, \|\cdot\|).$$

Відмітимо, що ми ставимо задачі відновлення за інформаційними множинами, що містять парну кількість вузлів. Це природно в силу специфіки періодичних функцій, але не є обов'язковим.

Відомі наступні результати, що стосуються вказаних задач найкращого відновлення.

1. $\mathfrak{M} = W_\infty^r$. Випадок, коли u — рівномірне розбиття, розглянуто в роботах В. М. Тихомірова [13] (задача 2 — в метриці простору C) і О. А. Женсикбаєва [4] (задача 2 — в метриці простору L_p , $1 \leq p < \infty$). В [1] В. Л. Велікін, зокрема, показав, що розв’язком задачі 3 в метриках просторів C і L_1 є рівномірне розбиття.

2. $\mathfrak{M} = W^r H^\omega = \{x \in C^r : \omega(x^{(r)}, t) \leq \omega(t)\}$, де $\omega(t)$ — заданий модуль неперервності, $r = 0, 1$ (див. М. П. Корнейчук [8]).

3. $\mathfrak{M} = W_{\infty, \sigma}^L = \{f \in L_\infty^r : |Lx(t)| \leq \sigma(t), t \in [0, 2\pi]\}$, де L — диференціальний оператор порядку r , $\sigma(t)$ — додатна неперервна функція (див. Б. Д. Боянов [3]).

У випадку, коли u — рівномірне розбиття, розв’язок задачі 2 для наступних класів функцій міститься в монографії [10].

4. $\mathfrak{M} = W_2^r$ в метриці простору L_2 .

5. $\mathfrak{M} = W_p^r$ в метриці простору L_1 .

Інші результати, що стосуються задач оптимального відновлення а також подальші посилання можна знайти в статтях [2, 12, 15–17, 20] а також монографіях [5, 10, 18, 19, 21].

Для $r, d \in \mathbb{N}$, цілих чисел $0 < k_1 < \dots < k_d \leq r$, $\mathbf{k} := (k_1, k_2, \dots, k_d)$, і додатних чисел M_{k_1}, \dots, M_{k_d} , $\mathbf{M} := (M_{k_1}, M_{k_2}, \dots, M_{k_d})$, позначимо через $W_\infty^r(\mathbf{M}, \mathbf{k})$ клас 2π – періодичних функцій $x \in L_\infty^r$ таких, що $\|x^{(k_i)}\|_\infty \leq M_{k_i}$ для всіх $k = 1, \dots, d$.

Ми будемо розглядати наступні частинні випадки класів $W_\infty^r(\mathbf{M}, \mathbf{k})$:

1. $d = 2, k_1 = r - 1, k_2 = r$;
2. $d = 2, k_1 = r - 2, k_2 = r$;
3. $d = 3, k_1 = r - 2, k_2 = r - 1, k_3 = r$.

У всіх випадках, що розглядаються, ми будемо вважати, що $M_r = 1$. Замість $W_\infty^r(\mathbf{M}, \mathbf{k})$ будемо писати $W_{r-1}^r(M)$ у випадку, коли $\mathbf{M} = (M, 1)$, $\mathbf{k} = (r - 1, r)$; $W_{r-2}^r(M)$ у випадку, коли $\mathbf{M} = (M, 1)$, $\mathbf{k} = (r - 2, r)$ і $W_{r-1, r-2}^r(M, N)$ у випадку, коли $\mathbf{M} = (M, N, 1)$, $\mathbf{k} = (r - 2, r - 1, r)$.

Через $\nu(f)$ будемо позначати число істотних змін знаку періодичної функції f на періоді; через $\nu(f, [a, b])$ — число істотних змін знаку функції f на відрізку $[a, b]$.

Ціллю даної статті є розв’язок задач 1 – 3 для класів $W_{r-1}^r(M)$, $W_{r-2}^r(M)$ і $W_{r-1, r-2}^r(M, N)$.

2 $W_\infty^r(\mathbf{M}, \mathbf{k})$ -ідеальні сплайни з заданими нулями

Означення 1 Функцію $x(t) \in W_{r-1}^r(M)$ будемо називати $W_{r-1}^r(M)$ – ідеальним сплайном з вузлами в точках $t_1 < t_2 < \dots < t_{2n+1} := 2\pi + t_1$, якщо для кожного $k = 1, \dots, 2n$ існують числа $\alpha_k \in [0, t_{k+1} - t_k]$ і $\varepsilon_k = \pm 1$ такі, що $x^{(r)}(t) = \varepsilon_k$ на інтервалі $(t_k, t_k + \alpha_k)$, $x^{(r)}(t) = 0$ на інтервалі $(t_k + \alpha_k, t_{k+1})$ і $x^{(r-1)}(t) = \varepsilon_k M$ на інтервалі $(t_k + \alpha_k, t_{k+1})$.

Означення 2 Функцію $x(t) \in W_{r-2}^r(M)$ будемо називати $W_{r-2}^r(M)$ – ідеальним сплайном с вузлами в точках $t_1 < t_2 < \dots < t_{2n+1} := 2\pi + t_1$, якщо для кожного $k = 1, \dots, 2n$ існують числа $\alpha_k \in [0, t_{k+1} - t_k]$ і $\varepsilon_k = \pm 1$ такі, що $x^{(r)}(t) = \varepsilon_k$ на інтервалі $(t_k, t_k + \frac{\alpha_k}{2})$, $x^{(r)}(t) = -\varepsilon_k$ на інтервалі $(t_k + \frac{\alpha_k}{2}, t_k + \alpha_k)$, $x^{(r)}(t) = 0$ на інтервалі $(t_k + \alpha_k, t_{k+1})$ і $x^{(r-2)}(t) = \varepsilon_k M$ на інтервалі $(t_k + \alpha_k, t_{k+1})$.

Означення 3 Функцію $x(t) \in W_{r-1,r-2}^r(M, N)$ назовемо $W_{r-1,r-2}^r(M, N)$ – ідеальним сплайном с вузлами в точках $t_1 < t_2 < \dots < t_{2n+1} := 2\pi + t_1$, якщо для кожного $k = 1, \dots, 2n$ існують числа $\alpha_k \in [0, t_{k+1} - t_k]$, $\beta_k \in [0, \alpha_k]$ і $\varepsilon_k = \pm 1$ такі, що $x^{(r)}(t) = \varepsilon_k$ на інтервалі $(t_k, t_k + \frac{\beta_k}{2})$, $x^{(r)}(t) = 0$ на інтервалі $(t_k + \frac{\beta_k}{2}, t_k + \alpha_k - \frac{\beta_k}{2})$, $x^{(r)}(t) = -\varepsilon_k$ на інтервалі $(t_k + \alpha_k - \frac{\beta_k}{2}, t_k + \alpha_k)$, $x^{(r)}(t) = 0$ на інтервалі $(t_k + \alpha_k, t_{k+1})$, $x^{(r-1)}(t) = \varepsilon_k N$ на інтервалі $(t_k + \frac{\beta_k}{2}, t_k + \alpha_k - \frac{\beta_k}{2})$ і $x^{(r-2)}(t) = \varepsilon_k M$ на інтервалі $(t_k + \alpha_k, t_{k+1})$.

Теорема 1 Нехай задано натуральні числа $n \in \mathbb{N}$ і числа $0 \leq u_1 < u_2 < \dots < u_{2n} < 2\pi$. Нехай X позначає один з класів $W_{r-1}^r(M)$, $W_{r-2}^r(M)$ або $W_{r-1,r-2}^r(M, N)$. Існує X – ідеальний сплайн з $2n$ вузлами, що має нулі в точках u_1, u_2, \dots, u_{2n} .

Нехай $X = W_{r-1}^r(M)$.

В просторі \mathbb{R}_1^{2n} розглянемо сферу S^{2n-1} радіуса 2π , тобто

$$S^{2n-1} = \left\{ \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n}) : \sum_{i=1}^{2n} |\xi_i| = 2\pi \right\}.$$

Кожній точці $\xi \in S^{2n-1}$ поставимо у відповідність розбиття відрізка $[0, 2\pi]$ точками $t_0 := 0, t_1 := |\xi_1|, t_2 := |\xi_1| + |\xi_2|, \dots, t_{2n-1} := \sum_{i=1}^{2n-1} |\xi_i|, t_{2n} := \sum_{i=1}^{2n} |\xi_i| = 2\pi$.

Для кожного $k = 1, \dots, 2n$ покладемо $\phi_1(\xi, t) = \text{sgn} \xi_k \cdot \min(t - t_{k-1}, M)$ на відрізку $[t_{k-1}, \frac{t_{k-1} + t_k}{2}]$; $\phi_1(\xi, t) = \text{sgn} \xi_k \cdot \min(t_k - t, M)$ на відрізку $[\frac{t_{k-1} + t_k}{2}, t_k]$. Таким чином ми визначили неперервну функцію $\phi_1(\xi, t)$ на всьому відрізку $[0, 2\pi]$, причому для всіх $k = 0, 1, \dots, 2n$ мають місце рівності $\phi_1(\xi, t_k) = 0$.

Для $k = 2, \dots, r-1$ покладемо

$$\phi_k(\xi, t) = \int_0^t \phi_{k-1}(\xi, s) ds - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t \phi_{k-1}(\xi, s) ds dt.$$

Покладемо $\phi_r(\xi, t) = \int_{u_1}^t \phi_{r-1}(\xi, s) ds$. Визначимо відображення $\eta: S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ наступним чином.

$$\eta(\xi) := \left(\int_0^{2\pi} \phi_1(\xi, t) dt, \phi_r(\xi, u_2), \phi_r(\xi, u_3), \dots, \phi_r(\xi, u_{2n}) \right).$$

В силу побудови функції $\phi_r(\xi, t)$ відображення η неперервне і непарне. Згідно з теоремою Борсука (див. [14]) існує нуль $\xi^* \in S^{2n-1}$ функції η . Це означає, що $\phi_r(\xi^*, u_k) = 0$, $k = 1, \dots, 2n$ і $\int_0^{2\pi} \phi_1(\xi^*, t) dt = 0$. Остання рівність дозволяє нам періодично продовжити функцію $\phi_r(\xi^*, t)$ на всю вісь зі збереженням гладкості. В силу побудови функцій $\phi_r(\xi, t)$ функція $\phi_r(\xi^*, t) \in W_{r-1}^r(M)$ – ідеальний сплайн с вузлами в точках розбиття. Крім того, $\phi_r(\xi^*, t)$ має нулі в заданих точках u_1, u_2, \dots, u_{2n} . Таким чином $\phi_r(\xi^*, t)$ – шуканий $W_{r-1}^r(M)$ – ідеальний сплайн. Теорему у випадку, коли $X = W_{r-1}^r(M)$, доведено.

Нехай $X = W_{r-2}^r(M)$.

Нехай $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a \in [-M, M]$. Для $b \in [0, \frac{|\beta|}{2}]$ визначимо функцію

$$\psi_b(\alpha, \beta; t): [\alpha, \alpha + |\beta|] \rightarrow \mathbb{R}$$

наступним чином. $\psi_b(\alpha, \beta; t) = t - \alpha$ на відрізку $[\alpha, \alpha + b]$, $\psi_b(\alpha, \beta; t) = \alpha + 2b - t$ на відрізку $[\alpha + b, \alpha + 2b]$, $\psi_b(\alpha, \beta; t) = 0$ на відрізку $[\alpha + 2b, \alpha + |\beta|]$.

Покладемо

$$B := \max \left\{ b \in \left[0, \frac{|\beta|}{2} \right] : \left| a + \operatorname{sgn} \beta \int_{\alpha}^t \psi_b(\alpha, \beta; s) ds \right| \leq M \forall t \in [\alpha, \alpha + |\beta|] \right\}$$

і $\psi(\alpha, \beta, a; t) := a + \operatorname{sgn} \beta \int_{\alpha}^t \psi_B(\alpha, \beta; s) ds$. Відмітимо, що справедливі наступні рівності:

$$\psi'(\alpha, \beta, a; \alpha) = \psi'(\alpha, \beta, a; \alpha + |\beta|) = 0. \quad (1)$$

Для натурального числа $m \in \mathbb{N}$ і вектора $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in \mathbb{R}^m$ визначимо функцію

$$\psi(\alpha, \zeta, a; t): \left[\alpha, \alpha + \sum_{k=1}^m |\zeta_k| \right] \rightarrow \mathbb{R}$$

наступним чином. На відрізку $[\alpha, \alpha + |\zeta_1|]$ $\psi(\alpha, \zeta, a; t) = \psi(\alpha, \zeta_1, a; t)$; на відрізку $[\alpha + |\zeta_1|, \alpha + |\zeta_1| + |\zeta_2|]$ $\psi(\alpha, \zeta, a; t) = \psi(\alpha + |\zeta_1|, \zeta_2, \psi(\alpha, \zeta, a; \alpha + |\zeta_1|); t)$; і так далі, на відрізку $\left[\alpha + \sum_{k=1}^{m-1} |\zeta_k|, \alpha + \sum_{k=1}^m |\zeta_k| \right]$

$$\psi(\alpha, \zeta, a; t) = \psi \left(\alpha + \sum_{k=1}^{m-1} |\zeta_k|, \zeta_m, \psi \left(\alpha, \zeta, a; \alpha + \sum_{k=1}^{m-1} |\zeta_k| \right); t \right).$$

Для вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{2n}) \in S^{2n-1}$ і $a \in [-M, M]$ покладемо $\psi(\xi, a; t) = \psi(0, \xi, a; t)$ (функція $\psi(\xi, a; t)$ визначена на відрізку $[0, 2\pi]$).

Нехай $a \in (M, M + \pi]$ і $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{2n}) \in S^{2n-1}$. Нехай, крім того, індекс $i \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$ такий, що $a - M \in \left[\sum_{k=0}^i |\xi_k|, \sum_{k=0}^{i+1} |\xi_k| \right)$ ($\xi_0 := 0$).

Визначимо функцію $\psi(\xi, a; t): [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ наступним чином. Покладемо $\psi(\xi, a; t) = M$ на відрізку $[0, a - M]$ і $\psi(\xi, a; t) = \psi(a - M, \zeta, M; t)$ на відрізку $[a - M, 2\pi]$, де

$$\zeta = \left(\operatorname{sgn} \xi_{i+1} \cdot \left(\sum_{k=0}^{i+1} |\xi_k| - a + M \right), \xi_{i+2}, \xi_{i+3}, \dots, \xi_{2n} \right) \in \mathbb{R}^{2n-i}.$$

Аналогічно визначимо функцію $\psi(\xi, a; t): [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ для $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{2n}) \in S^{2n-1}$ і $a \in [-M - \pi, -M]$: нехай індекс $i \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$ такий, що $-a - M \in \left[\sum_{k=0}^i |\xi_k|, \sum_{k=0}^{i+1} |\xi_k| \right)$ ($\xi_0 := 0$). Покладемо $\psi(\xi, a; t) = -M$ на відрізку $[0, -a - M]$ і $\psi(\xi, a; t) = \psi(-a - M, \zeta, -M; t)$ на відрізку $[-a - M, 2\pi]$, де

$$\zeta = \left(\operatorname{sgn} \xi_{i+1} \cdot \left(\sum_{k=0}^{i+1} |\xi_k| + a + M \right), \xi_{i+2}, \xi_{i+3}, \dots, \xi_{2n} \right) \in \mathbb{R}^{2n-i}.$$

Таким чином для всіх $a \in [-M - \pi, M + \pi]$ і $\xi \in S^{2n-1}$ ми визначили функцію $\psi(\xi, a; t): [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$. За побудовою функція $\psi(\xi, a; t)$ неперервна на $[0, 2\pi]$. Крім того в силу (1) вона неперервно диференційовна на $[0, 2\pi]$. $|\psi(\xi, a; t)| \leq M$ при всіх $t \in [0, 2\pi]$. Якщо $\xi \in S^{2n-1}$ і $-M - \pi \leq a_1 < a_2 \leq$

$M + \pi$, то для всіх $t \in [0, 2\pi]$ справедлива нерівність $\psi(\xi, a_1; t) \leq \psi(\xi, a_2; t)$. Відмітимо що, функції $\psi(\xi, a; t)$ неперервно залежать від параметрів a і ξ .

За побудовою для всіх $\xi \in S^{2n-1}$ $\int_0^{2\pi} \psi(\xi, M + \pi; t) dt > 0$ і $\int_0^{2\pi} \psi(\xi, -M - \pi; t) dt < 0$. Тому існує число $A = A(\xi) \in (-M - \pi, M + \pi)$ таке, що

$$\int_0^{2\pi} \psi(\xi, A; t) dt = 0. \quad (2)$$

Покладемо $\phi_2(\xi; t) := \psi(\xi, A; t)$. Для $k = 3, \dots, r - 1$ покладемо

$$\phi_k(\xi, t) = \int_0^t \phi_{k-1}(\xi, s) ds - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t \phi_{k-1}(\xi, s) ds dt.$$

Покладемо $\phi_r(\xi, t) = \int_{u_1}^t \phi_{r-1}(\xi, s) ds$.

Відмітимо, що для $k = 1, 2, \dots, r - 2$ і $k = r$ $\int_0^{2\pi} \phi_r^{(k)}(\xi; t) dt = 0$.

Визначимо відображення $\eta: S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ наступним чином.

$$\eta(\xi) := \left(\int_0^{2\pi} \phi_r^{(r-1)}(\xi, t) dt, \phi_r(\xi, u_2), \phi_r(\xi, u_3), \dots, \phi_r(\xi, u_{2n}) \right).$$

В силу побудови функції $\phi_r(\xi, t)$ відображення η неперервне і непарне. Згідно з теоремою Борсука існує нуль $\xi^* \in S^{2n-1}$ функції η . Це означає, що $\phi_r(\xi^*, u_k) = 0$, $k = 1, \dots, 2n$ і $\int_0^{2\pi} \phi_r^{(r-1)}(\xi^*, t) dt = 0$.

Остання рівність дозволяє нам періодично продовжити функцію $\phi_r(\xi^*, t)$ на всю вісь зі збереженням гладкості. Крім того $\phi_r(\xi^*, t)$ дорівнює нулю в заданих точках u_1, u_2, \dots, u_{2n} .

Якщо число $A = A(\xi^*)$, що фігурує у рівності (2), знаходиться на відрізку $[-M, M]$, то функція $\phi_r(\xi^*, t) - W_{r-2}^r(M)$ — ідеальний сплайн з вузлами $0, t_1, \dots, t_{2n-1}$. Припустимо, що $A = A(\xi^*) \in (M + \pi, M)$. Нехай $\xi^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_{2n}^*)$. Оскільки функція $\phi_r(\xi^*, t)$ має $2n$ нулів, то функція $\phi_r^{(r-2)}(\xi^*, t)$ має $2n$ змін знаку, а отже $A - M \in [0, |\xi_1^*|]$. Тоді функція $\phi_r(\xi^*, t) - W_{r-2}^r(M)$ — ідеальний сплайн з вузлами в точках $t_1 - A + M, t_2, t_3, \dots, t_{2n-1} + A - M$. Аналогічно доводиться, що $\phi_r(\xi^*, t) - W_{r-2}^r(M)$ — ідеальний сплайн і у випадку, коли $A = A(\xi^*) \in (-M - \pi, -M)$.

Таким чином $\phi_r(\xi^*, t)$ — шуканий $W_{r-2}^r(M)$ — ідеальний сплайн. Теорему у випадку, коли $X = W_{r-2}^r(M)$, доведено.

Доведення теореми у випадку, коли $X = W_{r-1, r-2}^r(M, N)$ аналогічно доведенню у випадку $X = W_{r-2}^r(M)$. Треба лише замість функції $\psi_b(\alpha, \beta; t)$ розглядати функцію $\min\{\psi_b(\alpha, \beta; t), N\}$. Теорему доведено.

Зауваження 1 Нехай задано числа $n \in \mathbb{N}$ і $0 \leq u_1 < u_2 < \dots < u_{2n} < 2\pi$. Нехай X позначає один з класів $W_{r-1}^r(M)$, $W_{r-2}^r(M)$ або $W_{r-1, r-2}^r(M, N)$. Через $\phi(u; t) = \phi(X, u; t)$, $u := (u_1, \dots, u_{2n})$ будемо позначати X — ідеальний сплайн з $2n$ вузлами, що дорівнює нулю в точках u_1, u_2, \dots, u_{2n} .

3 Інтерполяційні сплайни

Нехай X позначає один з класів $W_{r-1}^r(M)$, $W_{r-2}^r(M)$ або $W_{r-1,r-2}^r(M, N)$.

Означення 4 Розбиття

$$\Delta_{2n}: t_1 < t_2 < \dots < t_{2n+1} = 2\pi + t_1$$

будемо називати X – нормальним, якщо існує X – ідеальний сплайн ϕ з вузлами в точках розбиття Δ_{2n} , що має $2n$ нулів на періоді.

Нехай задано $W_{r-1}^r(M)$ – нормальне розбиття Δ_{2n} . Нехай $\phi(t) \in W_{r-1}^r(M)$ – ідеальний сплайн з вузлами в точках розбиття Δ_{2n} , що має $2n$ нулів. Нехай, як і у визначенні 1 $W_{r-1}^r(M)$ – ідеальних сплайнів, числа $\alpha_k \in [0, t_{k+1} - t_k]$ такі, що $\phi^{(r)}(t) = \pm 1$ на інтервалі $(t_k, t_k + \alpha_k)$ і $\phi^{(r)}(t) = 0$ на інтервалі $(t_k + \alpha_k, t_{k+1})$, $k = 1, \dots, 2n$.

Означення 5 Функцію $s(t) \in L_\infty^r$ будемо називати $W_{r-1}^r(M)$ – сплайном з вузлами в точках розбиття Δ_{2n} , якщо $s^{(r)}(t) = c_k$ на інтервалі $(t_k, t_k + \alpha_k)$, $s^{(r)}(t) = 0$ на інтервалі $(t_k + \alpha_k, t_{k+1})$, $k = 1, \dots, 2n$, $c_1, \dots, c_{2n} \in \mathbb{R}$.

Нехай задано $W_{r-2}^r(M)$ – нормальне розбиття Δ_{2n} . Нехай $\phi(t) \in W_{r-2}^r(M)$ – ідеальний сплайн з вузлами в точках розбиття Δ_{2n} , що має $2n$ нулів. Нехай, як і у визначенні 2 $W_{r-2}^r(M)$ – ідеальних сплайнів, числа $\alpha_k \in [0, t_{k+1} - t_k]$ такі, що $\phi^{(r)}(t) = \pm 1$ на інтервалі $(t_k, t_k + \frac{\alpha_k}{2})$, $\phi^{(r)}(t) = \mp 1$ на інтервалі $(t_k + \frac{\alpha_k}{2}, t_k + \alpha_k)$ і $\phi^{(r)}(t) = 0$ на інтервалі $(t_k + \alpha_k, t_{k+1})$, $k = 1, \dots, 2n$.

Означення 6 Функцію $s(t) \in L_\infty^r$ будемо називати $W_{r-2}^r(M)$ – сплайном з вузлами в точках розбиття Δ_{2n} , якщо

1. $s^{(r)}(t) = c_k^1$ на інтервалі $(t_k, t_k + \frac{\alpha_k}{2})$ і $s^{(r)}(t) = c_k^2$ на інтервалі $(t_k + \frac{\alpha_k}{2}, t_k + \alpha_k)$, $c_k^1, c_k^2 \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, 2n$;
2. $s^{(r)}(t) = 0$ на інтервалі $(t_k + \alpha_k, t_{k+1})$, $k = 1, \dots, 2n$;
3. $s^{(r-1)}(t_k) = 0$ для тих k , для яких $|\phi^{(r-2)}(t_k)| = M$;
4. $c_k^2 = c_{k+1}^1$ для тих k , для яких $|\phi^{(r-2)}(t_k)| < M$.

Нехай задано $W_{r-1,r-2}^r(M, N)$ – нормальне розбиття Δ_{2n} і $W_{r-1,r-2}^r(M, N)$ – ідеальний сплайн $\phi(t)$ з вузлами в точках розбиття Δ_{2n} , що має $2n$ нулів. Нехай, як і у визначенні 3 $W_{r-1,r-2}^r(M, N)$ – ідеальних сплайнів, числа $\alpha_k \in [0, t_{k+1} - t_k]$, $\beta_k \in [0, \alpha_k]$ такі, що $\phi^{(r)}(t) = \pm 1$ на множині $(t_k, t_k + \frac{\beta_k}{2})$, $\phi^{(r)}(t) = \mp 1$, $(t_k + \alpha_k - \frac{\beta_k}{2}, t_k + \alpha_k)$ $\phi^{(r)}(t) = 0$ на множині $(t_k + \frac{\beta_k}{2}, t_k + \alpha_k - \frac{\beta_k}{2}) \cup (t_k + \alpha_k, t_{k+1})$.

Означення 7 Функцію $s(t) \in L_\infty^r$ будемо називати $W_{r-1,r-2}^r(M, N)$ – сплайном з вузлами в точках розбиття Δ_{2n} , якщо

1. $s^{(r)}(t) = c_k^1$ на інтервалі $(t_k, t_k + \frac{\beta_k}{2})$ і $s^{(r)}(t) = c_k^2$ на інтервалі $(t_k + \alpha_k - \frac{\beta_k}{2}, t_k + \alpha_k)$, $c_k^1, c_k^2 \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, 2n$;
2. $s^{(r)}(t) = 0$ на інтервалах $(t_k + \alpha_k, t_{k+1})$ та $(t_k + \frac{\beta_k}{2}, t_k - \frac{\beta_k}{2} + \alpha_k)$, $k = 1, \dots, 2n$;
3. $s^{(r-1)}(t_k) = 0$ для тих k , для яких $|\phi^{(r-2)}(t_k)| = M$;
4. $c_k^2 = c_{k+1}^1$ для тих k , для яких $|\phi^{(r-2)}(t_k)| < M$.

Позначимо через $S(X; \Delta_{2n})$ множину всіх X – сплайнів по розбиттю Δ_{2n} . Відмітимо, що $S(X; \Delta_{2n})$ є $2n$ – вимірним лінійним простором.

Справедливе наступне твердження.

Лема 1 *Нехай X позначає один з класів $W_{r-1, r-2}^r(M, N)$, $W_{r-1}^r(M)$ або $W_{r-2}^r(M)$ і задано X – нормальне розбиття Δ_{2n} . Нехай, крім того, точки τ_k , $k = 1, 2, \dots, 2n$, задовольняють нерівностям $u_k < \tau_k < u_{k+1}$, $u_{2n+1} := u_1 + 2\pi$, де u_k – нулі відповідного X – ідеального сплайна $\phi(X; t)$, $k = 1, 2, \dots, 2n$. Тоді для будь-якого набору чисел y_1, \dots, y_{2n} існує єдиний X – сплайн $s(t) \in S(X; \Delta_{2n})$, що задовольняє умовам*

$$s(\tau_k) = y_k, \quad k = 1, \dots, 2n.$$

Для доведення леми 1 нам знадобиться наступна лема.

Лема 2 *Якщо виконані умови леми 1 і для сплайна $s(t) \in S(X; \Delta_{2n})$ виконуються співвідношення*

$$|s(\tau_k)| \leq |\phi(X; \tau_k)|, \quad k = 1, \dots, 2n, \quad (3)$$

то $\|s^{(r)}\|_\infty \leq 1$.

Припустимо супротивне, нехай $\|s^{(r)}\|_\infty > 1$. Покладемо $s_*(t) := \varepsilon \frac{s(t)}{\|s^{(r)}\|_\infty}$, $\varepsilon = \pm 1$ (значення ε ми виберемо пізніше). Тоді

$$\|s_*^{(r)}\|_\infty = 1. \quad (4)$$

В силу співвідношень (3) виконуються нерівності $|s_*(\tau_k)| < |\phi(X; \tau_k)|$, $k = 1, \dots, 2n$. Це означає, що різниця $\delta(t) := s_*(t) - \phi(X; t)$ має не менше ніж $2n$ змін знаку, оскільки $\text{sgn} \phi(X; \tau_k) = -\text{sgn} \phi(X; \tau_{k+1})$, $k = 1, \dots, 2n$.

Для скорочення записів у доведенні цієї леми будемо писати $\phi(t)$ замість $\phi(X; t)$.

Нехай $X = W_{r-1}^r(M)$. Виберемо ε так, щоб для деякого $k = 1, \dots, 2n$ майже всюди на інтервалі $t \in (t_k, t_{k+1})$ виконувалась рівність $s_*^{(r)}(t) = \phi^{(r)}(t)$. Це можливо в силу (4) і визначення $W_{r-1}^r(M)$ – сплайнів. Функція $\delta^{(r)}$ не змінює знак всередині інтервалів (t_j, t_{j+1}) $j = 1, \dots, 2n$ і рівна нулю на інтервалі (t_k, t_{k+1}) . Це означає, що функція $\delta^{(r)}$ має не більш ніж $2n - 2$ змін знаку, що неможливо.

Нехай $X = W_{r-2}^r(M)$. Функція $\phi(t)$ має $2n$ нулів, тому для кожного $k = 1, \dots, 2n$ похідна $\phi^{(r)}(t)$ має однаковий знак на інтервалах $(t_k + \frac{\alpha_k}{2}, t_k + \alpha_k)$ і $(t_{k+1}, t_{k+1} + \frac{\alpha_{k+1}}{2})$.

Якщо $|\phi^{(r-2)}(t_k)| < M$ для всіх $k = 1, \dots, 2n$, то $\phi^{(r)}(t)$ майже всюди відмінна від нуля, а отже є кусково сталою з $2n$ змінами знаку. Тому в силу (4) ми можемо вибрати $\varepsilon = \pm 1$ так, що функція $\delta(t)$ має не більше $2n - 2$ змін знаку, що неможливо.

Нехай натуральні числа $k_1 < k_2$ такі, що $|\phi^{(r-2)}(t_{k_1})| = |\phi^{(r-2)}(t_{k_2})| = M$ і $|\phi^{(r-2)}(t_k)| < M$, $k_1 < k < k_2$. Тоді звуження функції $\phi^{(r-1)}(t)$ на відрізок $[t_{k_1}, t_{k_2-1} + \alpha_{k_2-1}]$ є кусково лінійною функцією, на кожній ланці якої кутовий коефіцієнт дорівнює 1 або -1 , та яка змінює свій кутовий коефіцієнт $k_2 - k_1$ разів. Відмітимо, що $\phi^{(r-1)}(t_{k_1}) = \phi^{(r-1)}(t_{k_2}) = 0$ і $s_*^{(r-1)}(t_{k_1}) = s_*^{(r-1)}(t_{k_2}) = 0$. Крім того, в силу (4)

$$\|s_*^{(r)}\|_{L_\infty(t_{k_1}, t_{k_2})} \leq 1. \quad (5)$$

Це означає, що якщо S_1, \dots, S_m – це такі множини додатної міри, що

1. $S_j \subset [t_{k_1}, t_{k_2}]$, $j = 1, \dots, m$;
2. Якщо $x \in S_j$, $y \in S_{j+1}$, то $x < y$, $j = 1, \dots, m - 1$;
3. $\varepsilon(-1)^j \delta^{(r-1)}(t) > 0$, $t \in S_j$, $\varepsilon = \pm 1$, $j = 1, \dots, m$,

то $m \leq k_2 - k_1$. Більше того, якщо в (5) має місце рівність, то можна вибрати $\varepsilon = \pm 1$ так, щоб гарантувати нерівність $m \leq k_2 - k_1 - 1$ — для цього достатньо взяти ε так, щоб на деякому проміжку кусково лінійні функції $\phi^{(r-1)}$ та $s_*^{(r-1)}$ мали однаковий кутовий коефіцієнт. Це означає, що функція $\delta^{(r-1)}(t)$ (при відповідно вибраному значенні ε) має не більше ніж $2n - 1$ змін знаку, що неможливо. Прийшли до суперечності

Випадок $X = W_{r-1, r-2}^r(M, N)$ доводиться аналогічно.

Лему доведено.

Повернемося до доведення леми 1.

Доведемо, що тотожний нуль — це єдиний сплайн з $S(X; \Delta_{2n})$, що задовольняє нульовим інтерполяційним умовам. Припустимо супротивне, нехай ненульовий сплайн $s(t) \in S(X; \Delta_{2n})$ такий, що $s(\tau_k) = 0$, $k = 1, \dots, 2n$. Але тоді для будь-якого $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda s(\tau_k) = 0$, $k = 1, \dots, 2n$, що суперечить лемі 2.

$S(X; \Delta_{2n})$ є лінійним простором розмірності $2n$. Нехай ψ_1, \dots, ψ_{2n} — деякий базис простору $S(X; \Delta_{2n})$. Тоді довільний X — сплайн $s(t) \in S(X; \Delta_{2n})$ можна представити у вигляді $s(t) = \sum_{k=1}^{2n} c_k \psi_k(t)$. Знаходження інтерполяційного сплайна зводиться до розв'язку системи $2n$ лінійних

рівнянь $\sum_{k=1}^{2n} c_k \psi_k(\tau_j) = y_j$, $j = 1, \dots, 2n$ відносно параметрів c_k , $k = 1, \dots, 2n$, що визначають сплайн. Оскільки тотожний нуль — це єдиний сплайн з $S(X; \Delta_{2n})$, що задовольняє нульовим інтерполяційним умовам, то однорідна система рівнянь має тільки нульовий розв'язок. Це означає, що при довільних числах y_k , $k = 1, \dots, 2n$ відповідна неоднорідна система має єдиний розв'язок. Лему доведено.

Означення 8 Для класу X 2π — періодичних диференційовних функцій покладемо

$$X' := \{x'(t) : x(t) \in X\}.$$

Теорема 2 Нехай X позначає один з класів $W_{r-1, r-2}^r(M, N)$, $W_{r-1}^r(M)$ або $W_{r-2}^r(M)$. Нехай задано функція $x(t) \in X$ і числа $u_1 < u_2 < \dots < u_{2n} < u_1 + 2\pi$, $u = (u_1, \dots, u_{2n})$. Нехай $\Delta_{2n} : t_1 < t_2 < \dots < t_{2n} < 2\pi + t_1$ — вузли X — ідеального сплайна $\phi(X; u)$, що дорівнює нулю в точках u_1, \dots, u_{2n} . Тоді існує єдиний X' — сплайн $s(t) \in S(X', \Delta_{2n})$ такий, що $s(u_k) = x(u_k)$, $k = 1, \dots, 2n$.

Функція $\phi'(X; u) \in X'$ — ідеальним сплайном, що має $2n$ нулів. Тому розбиття $\Delta_{2n} \in X'$ — нормальним. Крім того, інтерполяційні вузли u_1, \dots, u_{2n} є нулями функції $\phi(X; u)$, а отже в силу теореми Ролля розташовані між нулями X' — ідеального сплайна $\phi'(X; u)$. Це означає, що виконуються умови леми 1, з якої ми одразу отримуємо існування (і єдиність) шуканого сплайна $s(t) \in S(X', \Delta_{2n})$, що інтерполює функцію $x(t)$ в точках u_1, \dots, u_{2n} . Теорему доведено.

Зауваження 2 В умовах теореми 2 сплайн $s(t) \in S(X', \Delta_{2n})$, який інтерполює функцію x в точках u , ми будемо позначати через $s(x, u; t) = s(X', x, u; t)$. Крім того, сплайн $s(t) \in S(X', \Delta_{2n})$, що інтерполює значення $v = (v_1, \dots, v_{2n})$ в точках u , ми будемо позначати $s(X', u, v; t)$.

4 Екстремальні властивості ідеальних сплайнів

X — ідеальні сплайни мають наступну екстремальну властивість.

Теорема 3 Нехай X позначає один з класів $W_{r-1,r-2}^r(M, N)$, $W_{r-1}^r(M)$ або $W_{r-2}^r(M)$. Нехай задано натуральне число $n \in \mathbb{N}$ і числа $0 \leq u_1 < u_2 < \dots < u_{2n} < 2\pi$, $u = (u_1, \dots, u_{2n})$. Тоді для всіх $x \in X$ і $t \in [0, 2\pi)$

$$|x(t) - s(X', x, u; t)| \leq |\phi(X, u; t)|.$$

Припустимо супротивне, нехай існує точка $t^* \in [0, 2\pi)$ така, що $|x(t^*) - s(X', x, u; t^*)| > |\phi(X, u; t^*)|$. Тоді існує число $\lambda \in (-1, 1)$ таке, що $\lambda(x(t^*) - s(X', x, u; t^*)) = \phi(X, u; t^*)$.

Покладемо $\delta(t) := \lambda x(t) - \lambda s(X', x, u; t) - \phi(X, u; t)$. Функція $\delta(t)$ має $2n+1$ нуль: точки u_1, \dots, u_{2n} і точка t^* .

Для скорочення позначень у доведенні цієї теореми замість $\phi(X, u; t)$ будемо писати просто $\phi(t)$, замість $s(X', x, u; t)$ — просто $s(t)$.

Нехай $X = W_{r-1}^r(M)$.

В силу теореми Ролля функція $\delta^{(r-1)}(t)$ має не менше ніж $2n+1$ змін знаку.

Нехай $k \in \{1, 2, \dots, 2n\}$. Ми можемо вважати, що $\phi^{(r)}(t) = 1$ на інтервалі $(t_k, t_k + \alpha_k)$, $\alpha_k \in [0, t_{k+1} - t_k]$ і $\phi^{(r)}(t) = 0$ на інтервалі $(t_k + \alpha_k, t_{k+1})$. Тоді функція $\phi^{(r-1)}(t) + \lambda s^{(r-1)}(t)$ є лінійною з кутовим коефіцієнтом 1 на інтервалі $(t_k, t_k + \alpha_k)$ і $\phi^{(r-1)}(t) + \lambda s^{(r-1)}(t) = M$ на інтервалі $(t_k + \alpha_k, t_{k+1})$. Враховуючи те, що $x(t) \in W_{r-1}^r(M)$, ми отримуємо, що $|\lambda x^{(r)}(t)| < 1$ і $|\lambda x^{(r-1)}(t)| < M$ для майже всіх t . Це означає, що $\delta^{(r-1)}(t) < 0$ на інтервалі $(t_k + \alpha_k, t_{k+1})$ і функція $\delta^{(r-1)}(t)$ має не більше ніж одну зміну знаку на інтервалі $(t_k, t_k + \alpha_k)$, причому якщо функція $\delta^{(r-1)}(t)$ змінює знак на інтервалі $(t_k, t_k + \alpha_k)$, то ця зміна знаку з "плюс" на "мінус". Таким чином на кожному проміжку (t_k, t_{k+1}) між вузлами сплайна $\phi(t)$ функція $\delta^{(r-1)}$ має не більше ніж одну зміну знака, і, крім того, якщо на кожному з проміжків (t_k, t_{k+1}) і (t_{k+1}, t_{k+2}) функція $\delta^{(r-1)}$ має по одній зміні знаку, то ця функція не має зміни знаку в точці t_{k+1} . Отже $\nu(\delta^{(r-1)}) \leq 2n$. Прийшли до суперечності. Теорему у випадку, коли $X = W_{r-1}^r(M)$, доведено.

Нехай $X = W_{r-2}^r(M)$.

Припустимо, що $|\phi^{(r-2)}(t)| < M$ на відрізку $[0, 2\pi]$. Тоді для кожного $k = 1, \dots, 2n$ функція $\phi^{(r-1)}(t) + \lambda s^{(r-1)}(t)$ є лінійною з кутовим коефіцієнтом ± 1 на інтервалі $(\frac{t_{k+1}+t_k}{2}, \frac{t_{k+2}+t_{k+1}}{2})$, причому на сусідніх інтервалах вказаного виду кутові коефіцієнти мають протилежні знаки. Це означає, що на кожному інтервалі $(\frac{t_{k+1}+t_k}{2}, \frac{t_{k+2}+t_{k+1}}{2})$ функція $\delta^{(r-1)}(t)$ має не більш ніж одну зміну знаку, причому з "плюс" на "мінус", якщо кутовий коефіцієнт дорівнює 1 і з "мінус" на "плюс", якщо кутовий коефіцієнт дорівнює -1 . Звідси ми отримуємо, що $\nu(\delta^{(r-1)}) \leq 2n$, що неможливо.

Таким чином $\max_{t \in [0, 2\pi]} |\phi^{(r-2)}(t)| = M$. З теореми Ролля слідує, що функція $\delta^{(r-2)}(t)$ має не менше $2n+1$ змін знаку.

Нехай відрізок $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ такий, що

$$|\phi^{(r-2)}(\alpha)| = |\phi^{(r-2)}(\beta)| = M \quad (6)$$

і

$$|\phi^{(r-2)}(t)| < M, \quad t \in (\alpha, \beta). \quad (7)$$

Можемо вважати, що $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{l-1} < \beta$ — всі вузли $W_{r-2}^r(M)$ — ідеального сплайна $\phi(t)$ на інтервалі $[\alpha, \beta]$ (у випадку необхідності можемо перенумерувати вузли). Покладемо $t_l := \beta$ (число t_l може бути вузлом $\phi(t)$, а може їм не бути). Покажемо, що $\nu(\delta^{(r-2)}, [\alpha, \beta]) \leq l$. Відмітимо, що в силу (7) і означення $W_{r-2}^r(M)$ — ідеальних сплайнів функція $\phi^{(r)}$ відмінна від нуля майже всюди на (α, β) .

Без зменшення загальності можемо вважати, що

$$\phi^{(r-2)}(\alpha) = -M. \quad (8)$$

Покладемо $q_0 := t_0$, $q_k := \frac{t_{k-1} + t_k}{2}$, $k = 1, \dots, l$, $q_{l+1} = t_l$, $\psi(t) := \phi(t) + \lambda s(t)$.

В силу побудови функцій ϕ і s і рівності (8) на інтервалі (q_k, q_{k+1})

$$\psi^{(r)}(t) = (-1)^k, \quad k = 0, 1, \dots, l. \quad (9)$$

Оскільки

$$\|\lambda x^{(r)}\|_\infty < 1, \quad (10)$$

то на кожному з проміжків (q_k, q_{k+1}) функція $\delta^{(r-1)}$ може змінювати знак не більше ніж один раз, причому з "плюс" на "мінус" при парних k і з "мінус" на "плюс" при непарних k , $k = 0, \dots, l$. Таким чином $\nu(\delta^{(r-1)}, [\alpha, \beta]) \leq l + 1$. Це означає, що $\nu(\delta^{(r-2)}, [\alpha, \beta]) \leq l + 2$.

Припустимо, що $\nu(\delta^{(r-2)}, [\alpha, \beta]) = l + 2$. Тоді існують точки $\alpha \leq r_1 < r_2 < \dots < r_{l+2} \leq \beta$ такі, що $\delta^{(r-2)}(r_1) = \delta^{(r-2)}(r_2) = \dots = \delta^{(r-2)}(r_{l+2}) = 0$ і (в силу (8)) $(-1)^k \delta^{(r-1)}(r_k) > 0$, $k = 1, \dots, l + 2$. Це означає, що $\nu(\delta^{(r-1)}, [\alpha, \beta]) = l + 1$ і перша зміна знаку $\delta^{(r-1)}$ на відрізку $[\alpha, \beta]$ відбувається з "мінус" на "плюс", що неможливо. Таким чином $\nu(\delta^{(r-2)}, [\alpha, \beta]) \leq l + 1$.

Припустимо, що $\nu(\delta^{(r-2)}, [\alpha, \beta]) = l + 1$. Враховуючи (8) отримаємо, що

$$(-1)^l \delta^{(r-2)}(\beta) \leq 0. \quad (11)$$

Крім того, функція $\delta^{(r-1)}(t)$ змінює знак не менше l раз, причому перша зміна знаку з "мінус" на "плюс". Це означає, що існує точка $\tau \in (q_l, q_{l+1})$ така, що $(-1)^l \delta^{(r-1)}(\tau) < 0$. Оскільки виконуються співвідношення (9) і (10), то $(-1)^l \delta^{(r-1)}(\beta) < 0$. Але звідси в силу (6), (8) і (11) слідує, що $\|x^{(r-2)}\|_\infty > M$, що неможливо. Це означає, що $\nu(\delta^{(r-2)}, [\alpha, \beta]) \leq l$, а отже $\nu(\delta^{(r-2)}) \leq 2n$. Прийшли до суперечності. Теорему у випадку, коли $X = W_{r-2}^r(M)$, доведено.

Випадок, коли $X = W_{r-1, r-2}^r(M, N)$ можна довести аналогічно до випадку $X = W_{r-2}^r(M)$.

Теорема 4 Нехай X позначає один з класів $W_{r-1, r-2}^r(M, N)$, $W_{r-1}^r(M)$ або $W_{r-2}^r(M)$. Нехай задано натуральне число $n \in \mathbb{N}$ і числа $0 \leq u_1 < u_2 < \dots < u_{2n} < 2\pi$, $u := (u_1, \dots, u_{2n})$, $u^* := (0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{n})$. Тоді якщо $u \neq u^*$, то

$$\|\phi(X, u)\|_\infty > \|\phi(X, u^*)\|_\infty.$$

Доведемо теорему у випадку, коли $X = W_{r-2}^r(M)$. Інші випадки доводяться аналогічно. Для скорочення записів будемо замість $\phi(X, u)$ писати $\phi(u)$.

Відмітимо, що функція $\phi(u^*) \in \frac{2\pi}{n}$ періодичною і, крім того, справедлива рівність $\phi(u^*; t) = -\phi(u^*; t + \frac{\pi}{n})$.

Припустимо супротивне. Нехай $u \neq u^*$ і

$$\|\phi(u)\|_\infty \leq \|\phi(u^*)\|_\infty. \quad (12)$$

Тоді для будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}$

$$\nu(\pm\phi(u; \gamma + \cdot) - \phi(u^*; \cdot)) \geq 2n. \quad (13)$$

Можливі два випадки.

Випадок 1. Нехай $\|\phi^{(r-2)}(u^*; \cdot)\|_\infty = M$. Без зменшення загальності можемо вважати, що функція $\phi^{(r-2)}(u^*; t)$ зростає на відрізку $[0, \frac{\pi}{n} - \alpha]$, постійна на $[\frac{\pi}{n} - \alpha, \frac{\pi}{n}]$, спадає на $[\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n} - \alpha]$ і постійна на $[\frac{2\pi}{n} - \alpha, \frac{2\pi}{n}]$, де $\alpha \geq 0$. За означенням $W_{r-2}^r(M)$ – ідеального сплайна

$$|\phi^{(r-2)}(u^*; t)| = M, \quad t \in \left[\frac{\pi}{n} - \alpha, \frac{\pi}{n}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{n} - \alpha, \frac{2\pi}{n}\right]. \quad (14)$$

Нехай $t_1 < t_2 < \dots < t_{2n+1} := 2\pi + t_1$ — вузли $W_{r-2}^r(M)$ — ідеального сплайна $\phi(u; t)$. Нехай індекс $i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ такий, що $t_{i+1} - t_i > \frac{\pi}{n}$. Без зменшення загальності можемо вважати, що $\phi^{(r-2)}(u; t)$ не спадає на проміжку $[t_i, t_{i+1}]$. Тоді існує число $\beta > \alpha$ таке, що $\phi^{(r-2)}(u; t)$ зростає на проміжку $[t_i, t_{i+1} - \beta]$ і $\phi^{(r-2)}(u; t) = M$ на проміжку $[t_{i+1} - \beta, t_{i+1}]$. Розглянемо функцію $\delta(t) := \phi^{(r-2)}(u; t - t_i) - \phi^{(r-2)}(u^*; t)$. З (13) випливає, що $\nu(\delta) \geq 2n$. Відмітимо, що звуження функції $\phi(X, u^*)$ на відрізок $\left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n} - \alpha\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, співпадає зі звуженням на цей відрізок відносно підбраного ідеального сплайна Ейлера. Тому з теореми порівняння Колмогорова (див. [7]) випливає, що на відрітку $\left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n} - \alpha\right]$ функція $\delta(t)$ може мати не більше ніж одну зміну знака (причому з "плюс" на "мінус", якщо $\phi^{(r-1)}(u^*; t)$ невід'ємна на цьому проміжку і з "мінус" на "плюс", якщо недоводатна). Тепер, враховуючи (14) і симетрії функції $\phi(u^*; t)$, ми отримуємо, що на кожному з проміжків знакопостійності функції $\phi^{(r-1)}(u^*; t)$ функція $\delta(t)$ може мати не більше ніж одну зміну знака, причому з "плюс" на "мінус" на проміжках невід'ємності $\phi^{(r-1)}(u^*; t)$ і з "мінус" на "плюс" на проміжках недоводатності $\phi^{(r-1)}(u^*; t)$. Але $[t_{i+1} - t_i - \beta, t_{i+1} - t_i] \supset \left[\frac{\pi}{n} - \alpha, \frac{\pi}{n}\right]$ і $\delta(t) \geq 0$ для всіх $t \in [t_{i+1} - t_i - \beta, t_{i+1} - t_i]$. Це означає, що функція $\delta(t)$ не має змін знаку на проміжку $[0, \frac{\pi}{n}]$. Але тоді $\nu(\delta) \leq 2n - 1$. Прийшли до суперечності.

Випадок 2. Нехай $\|\phi^{(r-2)}(u^*; \cdot)\|_\infty < M$. Тоді $\phi(u^*; t)$ — ідеальний сплайн Ейлера. З (12) і теореми порівняння Колмогорова випливає, що

$$\|\phi^{(r-2)}(u; \cdot)\|_\infty \leq \|\phi^{(r-2)}(u^*; \cdot)\|_\infty < M.$$

Це означає, що $|\phi^{(r)}(u; t)|_\infty = 1$ майже всюди на $[0, 2\pi]$.

Нехай $t_1 < t_2 < \dots < t_{2n+1} := 2\pi + t_1$ — вузли $W_{r-2}^r(M)$ — ідеального сплайна $\phi(u; t)$. Тоді існує індекс $i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ такий, що $t_{i+1} - t_i > \frac{\pi}{n}$. Тоді можна вибрати зсув $\phi(u; \gamma + \cdot)$ функції $\phi(u; t)$ так, що $\nu(\phi^{(r)}(u; \gamma + \cdot) - \phi^{(r)}(u^*; \cdot)) \leq 2n - 1$. Але це суперечить (13). Теорему доведено.

5 Задачі найкращого відновлення

Для розв'язку задачі 1 нам знадобиться наступна лема.

Лема 3 *Нехай X позначає один з класів $W_{r-1, r-2}^r(M, N)$, $W_{r-1}^r(M)$ або $W_{r-2}^r(M)$. Нехай задано числа $0 \leq u_1 < u_2 < \dots < u_{2n} < 2\pi$, $u := (u_1, \dots, u_{2n})$ і $\tau \in [0, 2\pi)$. Тоді*

$$E(X, u, \tau) = \sup \{x(\tau) : x \in X, x(u_k) = 0, k = 1, \dots, 2n\}.$$

Відмітимо, що класи $W_{r-1}^r(M)$, $W_{r-2}^r(M)$ або $W_{r-1, r-2}^r(M, N)$ є опуклими і центрально-симетричними. Тому серед оптимальних методів відновлення існує лінійний (див. [11]). Це означає, що

$$E(X, u, \tau) = \inf_{c_k} \sup_{x \in X} \left(x(\tau) - \sum_{k=1}^{2n} c_k x(u_k) \right),$$

де точна нижня межа береться по всім векторам $(c_1, \dots, c_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Клас X можна представити у наступному вигляді: $X = \{x \in L_\infty^r : p(x) \leq 1\}$, де

$$p(x) = \max \left\{ \|x^{(r)}\|_\infty, \frac{\|x^{(r-1)}\|_\infty}{M} \right\}$$

у випадку, коли $X = W_{r-1}^r(M)$; $p(x) = \max \left\{ \|x^{(r)}\|_\infty, \frac{\|x^{(r-2)}\|_\infty}{M} \right\}$ у випадку, коли $X = W_{r-2}^r(M)$ і

$$p(x) = \max \left\{ \|x^{(r)}\|_\infty, \frac{\|x^{(r-1)}\|_\infty}{N}, \frac{\|x^{(r-2)}\|_\infty}{M} \right\}$$

у випадку, коли $X = W_{r-1, r-2}^r(M, N)$. Відмітимо, що у всіх трьох випадках функція $p(x)$ додатно однорідна і напівадитивна.

Тепер, застосовуючи міркування аналогічні до доведення теореми 1.3.4 монографії [9] (тільки потрібно застосувати більш загальне формулювання теореми Хана-Банаха, див., напр., глава 3 § 2 в монографії [6]), отримуємо справедливості твердження леми. Лему доведено.

З леми 3 і теорем 2 і 3 отримуємо розв'язок задачі 1.

Теорема 5 *Нехай X позначає один з класів $W_{r-1, r-2}^r(M, N)$, $W_{r-1}^r(M)$ або $W_{r-2}^r(M)$. Нехай задано числа $0 \leq u_1 < u_2 < \dots < u_{2n} < 2\pi$, $u := (u_1, \dots, u_{2n})$ і $\tau \in [0, 2\pi)$. Тоді*

$$E(X, u, \tau) = |\phi(X, u; \tau)|.$$

Найкращим методом відновлення у задачі 1 є метод

$$\tilde{\Phi}(v_1, \dots, v_{2n}) = s(X', u, v; \tau).$$

З теорем 2, 3 і 5 отримуємо розв'язок задачі 2.

Теорема 6 *Нехай X позначає один з класів $W_{r-1, r-2}^r(M, N)$, $W_{r-1}^r(M)$ або $W_{r-2}^r(M)$. Нехай задано числа $0 \leq u_1 < u_2 < \dots < u_{2n} < 2\pi$, $u := (u_1, \dots, u_{2n})$ і $p \in [1, \infty]$. Тоді*

$$E(X, u, \|\cdot\|_p) = \|\phi(X, u; \cdot)\|_p.$$

Найкращим методом відновлення у задачі 2 є метод

$$\tilde{\Psi}(v_1, \dots, v_{2n}) = s(X', u, v; t).$$

З теорем 4 і 6 отримуємо наступну теорему.

Теорема 7 *Нехай X позначає один з класів $W_{r-1, r-2}^r(M, N)$, $W_{r-1}^r(M)$ або $W_{r-2}^r(M)$. Нехай $u^* := \left(0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{n}\right)$. Тоді*

$$E(X, \|\cdot\|_\infty) := e(X, u^*, \|\cdot\|_\infty),$$

тобто найкращою інформаційною множиною (у випадку рівномірної метрики) є рівномірне розбиття відрізка $[0, 2\pi]$.

Список литературы

- [1] Великин В. Л. Оптимальная интерполяция периодических дифференцируемых функций с ограниченной старшей производной / В. Л. Великин // Матем. заметки. — 1977. — Т. 22, № 5. — С. 663–670.
- [2] Боянов Б. Д. Наилучшие методы интерполирования для некоторых классов дифференцируемых функций / Б. Д. Боянов // Матем. заметки. — 1975. — Т. 17, № 4. — С. 511–524.

- [3] Боянов Б. Д. Оптимальное восстановление дифференцируемых функций / Б. Д. Боянов // Матем. сб. — 1990. — Т. 181, № 3. — С. 334–353.
- [4] Женсыкбаев А. А. Приближение дифференцируемых периодических функций сплайнами по равномерному разбиению / А. А. Женсыкбаев // Матем. заметки. — 1973. — Т. 13, № 6. — С. 807–816.
- [5] Женсыкбаев А. А. Проблемы восстановления операторов / А. А. Женсыкбаев. — Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. — 412 с.
- [6] Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 543 с.
- [7] Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале / А. Н. Колмогоров // Избр. тр. Матем, мех. — М. : Наука, 1985. — С. 252–263.
- [8] Корнейчук Н. П. Поперечники в L_p классов непрерывных и дифференцируемых функций и оптимальные методы кодирования и восстановления функций и их производных / Н. П. Корнейчук // Изв. АН СССР, Серия Матем. — 1981. — Т. 45, № 2. — С. 266–290.
- [9] Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения / Н. П. Корнейчук. — М. : Наука, 1987. — 423 с.
- [10] Моторный В. П. Оптимальное восстановление функций и функционалов / В. П. Моторный, А. А. Лигун, В. Г. Доронин. — Дніпропетровськ : Вид-во ДДУ, 1994. — 224 с.
- [11] Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов на них : Дисс... кандидата наук / С. А. Смоляк ; МГУ. — Москва, 1965.
- [12] Тихомиров В. М. Итоги науки и техн / В. М. Тихомиров // Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — 1987. — Т. 14. — С. 103–260.
- [13] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений / В. М. Тихомиров. — М. : Изд-во МГУ, 1975. — 304 с.
- [14] Borsuk K. Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre / K. Borsuk // Fund. Math. — 1933. — Vol. 20. — P. 177–190.
- [15] Ligun A. A. Inequalities for upper bounds of functionals / A. A. Ligun // Analysis Math. — 1976. — Т. 2, № 1. — С. 11–40.
- [16] Micchelli C. A. On n -Widths and Optimal Recovery in M^r / C. A. Micchelli, A. Pinkus // Approximation Theory, II / Ed. by G. G. Lorentz, C. K. Chui, L. L. Schumaker. — N. Y., 1976. — P. 475–478.
- [17] Micchelli C. A. The optimal recovery of smooth functions / C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, S. Winograd // Numer. Math. — 1975. — Vol. 26, no. 2. — P. 191–200.
- [18] Micchelli C. A. Optimal Estimation in Approximation Theory / C. A. Micchelli, T. J. Rivlin. — NY : Plenum Press, 1977. — 300 p.

- [19] Osipenko K. Yu. Optimal Recovery of Analytic Functions / K. Yu. Osipenko. — Huntington, New York : Nova Science Publishers, Inc., 2000. — 220 p.
- [20] Pinkus A. N-widths and optimal recovery / A. Pinkus // Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. — 1986. — Vol. 36. — P. 51–66.
- [21] Traub J. F. A general theory of optimal algorithms / J. F. Traub, H. Woźniakowski. — Academic Press, 1980. — 341 p.